Title	Banach spaceニ於ケル二次Operatorニツイテ
Author(s)	清水, 辰次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(1) p.21-p.24
Issue Date	1946-11-03
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75141
rights	
Note	

6 Banach space ニ於ケル二次 Operator ニツイテ

陸大　清水辰次郎

(10月26日受付)

Banach 空間 (Complete normed linear space) ニ於ケル linear operator ノ性質ハ善ク研究セラレテキルガ更ニ高次ノ operator ヤ解析的 operator ニ関シテハ Banach 門下及ビアメリカニ於テ幾ツカノ研究ガアルダケデ函数空間論的研究ハ未ダアマリ発展シテ居ナイ。

次ニ二次斉次多項式 Operator ニ関スル二三ノ性質ヲ述ベヨウ。E, E' ヲ複素数ヲオペレータートスル Banach 空間トシ $x, y, \cdots\cdots$ ヲ以テソノ要素, $\alpha, \beta, \cdots\cdots$ ヲ以テ複素数ヲ表ハス

$p(x)$ ハ空間 E ヨリ空間 E' ニ変ズ operator トス。

定義.　$p(\alpha x+\beta y) = \alpha^2 p_1(x,y) + \alpha\beta p_2(x,y) + \beta^2 p_3(x,y)$ ヲ満足スル operator $p(x)$ ヲ二次ノ斉次多項式 operator トイフ。此所ニ $p_i(x,y)$ 等ハ $E\times E$ ヨリ E' ヘノ operator デ $p_i(x,y)$ $p(x)$ 等ハ連続性ヲ仮定シナイ。

先ヅ定義ヨリ　$\alpha=1, \beta=0$ トオキ　$p_1(x,y)\equiv p(x)$

$\alpha=0, \beta=1$ トオキ　$p_3(x,y)\equiv p(y)$

$\alpha=1, \beta=1$ トオキ　$p_2(x,y)\equiv p_2(y,x)$

ナルヲ知ル.

定義ヨリ明カナ如ク　$p(x+\alpha y)$ ハ α ニ関シテ連続デアル

次ニ

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{p(x+\tau y)-p(x)}{\tau} = p_2(x,y)$$

$y=\alpha y_1+\beta y_2$ トオキ, $\xi=\tau\alpha$, $\eta=\tau\beta$ トシタコトニヨリ

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{p(x+\xi y_1+\eta y_2)-p(x)}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to 0} \frac{p(x+\xi y_1+\eta y_2)-p(x+\eta y_2)+p(x+\eta y_2)-p(x)}{\tau}$$

$$=\alpha\, p_2(x, y_1)+\beta\, p_2(x, y_2)$$

以上ハ $p(x+\alpha y)$ ガ $\alpha \to 0$ ナルトキ連続ナルコトヨリ出ル. $p(x)$ ノ連続性ハ仮定セナイ.

依ッテ

$$p_2(x, \alpha y_1+\beta y_2)=\alpha\, p_2(x, y_1)+\beta\, p_2(x, y_2)$$

即チ $p_2(x, y)$ ハ x 及ビ y ニ関シテ一次斉次 operator デアル.

依ッテ勿論

$$p_2(x, 0)=p_2(0, y)=0$$

定理 1. 二次斉次多項式 operator ガ連続ナラバ有界デアル。

($x=0$ ニテ連続ナラバ有界)

仮リニ有界ナラズトシテ, $M_n \to \infty$

$\|p(x_n)\| > M_n \|x_n\|^2$ ナラバ

$$Y_n=\frac{1}{\sqrt{M_n}\,\|x_n\|}\, x_n \text{ トオキ } \|Y_n\| \to 0$$

$$\therefore\ p(Y_n)=\frac{1}{M_n \|x_n\|}\, p(x_n) > 1$$

然ルニ $x=0$ ニテ $p(x)$ ハ連続ナル故

$$p(Y_n) \to p(0)=0$$

定理 2. 二次斉次多項式 operator ガ有界ナラバ連続

先ヅ $x_n \to 0$ ナル系列 x_n ヲ考ヘル

有界ナル故 $\|p(x_n)\| < M \|x_n\|^2$

依ッテ $\|p(x_n)-0\| < M\|x_n\|^2 \to 0$

即チ有界ナラバ, $x=0$ ニテ連続トナル

一方二次齊次多項式 operator ハ

$$p(x+y) = p(x) + p_2(x,y) + p(y)$$

ト書キ表ハサレルカラ, $y_n \to 0$ ナル系列 y_n ニ対シ $p(y)$ ハ $y=0$ ニテ連続且 $p(0)=0$ ナル故, 先ヅ $p(y_n) \to 0$

$p_2(x,y)$ ハ x, y ニ関シ additive ナルヲ知ッタガ

$$p_2(x,y) = p(x+y) - p(x) - p(y)$$

カラ有界, 即チ

$$\| p_2(x,y) \| < M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\left(\because \; p_2\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) = p\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) - p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - p\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right.$$

$p(x)$ ノ仮定カラ右辺ハ M ニテ上ニ界セラル.)

x ヲ一定トシテ考ヘレバ $p_2(x,y)$ ハ y ニ関シテ連続ナル故

$$\lim_{y_n \to 0} p_2(x, y_n) = p_2(x, 0) = 0$$

依ッテ

$$p(x+y_n) = p(x) + p_2(x, y_n) + p(y_n)$$

ヨリ

$$p(x+y_n) \longrightarrow p(x)$$

即チ $p(x)$ ハ連続トナル。以上ノ証明ニテ明カナ如シ

定理　二次齊次多項式 operator ハ一点ニテ連続ナラバスベテノ点ニテ連続トナル.

附記　$p(\alpha x + \beta y) = \alpha^n p_1(x,y) + \alpha^{n-1}\beta p_2(x,y) + \cdots + \beta^n p_{n+1}(x,y)$

ヲ以ッテ n 次齊次多項式 operator ヲ定義スレバ

$$p_1(x,y) \equiv p(x),$$
$$p_{n+1}(x,y) \equiv p(y).$$

且, $p_2(x,y), p_3(x,y), \cdots, p_n(x,y)$ ハ夫々 y ニ関シテ一次, 二次, $(n-1)$ 次

xニ関シ(n-1)次, (n-2)次, ⋯⋯ 一次ノ operator ナルコトガ示サレル。 $p(x)$ ガ連続デナケレバ, ソレラハ連続トハ限ラヌ。

併シ $p(x+\lambda y)$ ハ λ ノ解析函数デアルカラ Cauchy ノ積分表示ガデキテ,

$$p_j(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{p(x+\tau y)}{\tau^{j+1}}\,d\tau$$

ヲ得ル (C ハ $\tau = 0$ ヲ中心トスル円周)

$$p_j\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{p\left(x+\tau\frac{y}{\|y\|}\right)}{\tau^{j+1}}\,d\tau$$

カラ $p(x)$ ガ有界ナラバ

[illegible]

依ッテ

$$\| p_j(x, y) \| \leq M_x \|y\|^{j+1}$$

猶上ノ積分表示ヨリ

$$p_j(x, 0) = 0 \qquad j = 2, 3, \cdots, n$$

依ッテ $p(x+y_n) - p(x) = p_2(x, y_n) + \cdots\cdots + p_{n+1}(y_n)$

ヨリ明カニ $y_n \to 0$ ナルトキ

$$p(x+y_n) \to p(x)$$

即チ n次齊次多項式 operator ハ有界ナラバ連続デアル。連続ナラバ有界ナルコトモ一点ニテ連続ナラバ x ノ任意ノ点ニテ連続ナルコトモ一次 operator ノ場合ト同様ニ示サレル

(以上)